Mathématiques I

112

5 nov. 2008 **8h30-11h30**

CONSEIL NATIONAL DES EXAMENS AU RWANDA

B.P. 3817 KIGALI-TEL/FAX : 586871

EXAMEN NATIONAL DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES 2008

EPREUVE : MATHEMATIQUES I

OPTIONS : - MATH-PHYSIQUE
- MATH-PHYSIQUE + LATIN

DUREE : 3 HEURES

INSTRUCTIONS:

- Chaque candidat est invité à répondre à **TOUTES** les questions de la Section A et à **TROIS** de son choix de la Section B.
- L'usage ***individuel*** des instruments de géométrie et calculatrices est autorisé.

SECTION A : (55 points)

1. Soit $\perp$ une loi binaire définie sur l'anneau des entiers (Z) par $a \perp b = a + b - 1$.

   a) Calculez $(-10) \perp (-2)$; $2 \perp (-7)$.

   b) La loi ainsi définie est-elle commutative? Associative?

   c) Déterminez s'il existe un élément de Z neutre pour cette loi.

   d) S'il en existe un, quels sont les éléments inversibles ?

   e) Que peut-on conclure sur $(Z, \perp)$? **(5pts)**

2. a) Vérifiez par différentiation que $\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + C$ avec C une constante arbitraire.

   b) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des y (ordonnées) de la surface limitée par la courbe $y = \sin x$ lorsque x varie entre $x = 0$ et $x = \pi$. **(3pts)**

3. a) Pour calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x + x^2}$, un étudiant applique deux fois successives la règle de l' Hospital et trouve $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1 + 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(-\sin x)}{2} = 0$.
   Expliquez pourquoi ce résultat est faux. Quel est le résultat correct?

   b) Evaluez $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec x}{tgx}$ **(3,5pts)**

4. Les événements C et D appartenant à un même espace probabilisé sont tels que $p(C) = \dfrac{4}{7}$; $p(C \cap \overline{D}) = \dfrac{1}{3}$; $p(C/D) = \dfrac{5}{14}$ avec $\overline{D}$ l'événement complémentaire de D.

   a) Calculez $p(C \cap D), p(D)$ et $p(D/C)$.

   b) Vérifiez si C et D sont indépendants. **(3,5pts)**

5. Dans un certain collège: 65% des étudiants sont internes, 55% des étudiants sont de filles et 35% des étudiants sont de garçons internes. Calculez la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard de tous les étudiants du collège soit

   a) externe;

   b) une fille externe. **(3pts)**

6. Soient $\vec{u} = (-1,2,3)$ et $\vec{v} = (-2,0,3)$ deux vecteurs de l'espace vectoriel réel $\Re^3$.

a) Calculez $2\vec{u} - 3\vec{v}$.

b) Trouvez les réels (s'ils existent) α, β tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w}$ *avec* $\vec{w} = (-4,4,5)$.

c) Précisez si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de $\Re^3$.

(3,5pts)

7. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ définit une application linéaire $f : \Re^3 \to \Re^2$ dans les bases canoniques. Déterminez le noyau *(Ker f)* et l'image *(Im f)* de *f*.

(4pts)

8. Dans l'espace euclidien $(\Re^3, +, .)$, trouvez :

a) les équations paramétriques de la droite intersection des deux plans $2x + y + z = 4$ *et* $3x - y + z = 3$.

b) une équation du plan qui passe par le point *P(1,3,-2)* et contient la droite intersection des plans
$x - y + z = 1$ *et* $x + y - z = 1$.

(4pts)

9. Soient les nombres complexes $z = -12i\sqrt{3} + 12$, $t = -6\sqrt{3} + 6i$ *et* $w = \dfrac{z}{t}$.

a) Calculez le module et un argument de z et t

b) Ecrivez w et w^6 sous les deux formes (algébriques et trigonométriques).

(4pts)

10. Pour calculer $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ un étudiant applique le théorème fondamental de l'intégration et trouve $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{1} = -2$. Ce qui, apparemment, est en contradiction avec le fait que la fonction à intégrer $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est toujours positive. Qu'est-ce qui est faux ?

(2pts)

11. a) Que peut être l'aire maximum possible du rectangle ayant pour diagonale 16m ?

b) Trouvez tous les réels x tels que $4^x - 2^x - 2 \geq 0$

(4pts)

12. La variable aléatoire continue X a pour densité de probabilité la fonction

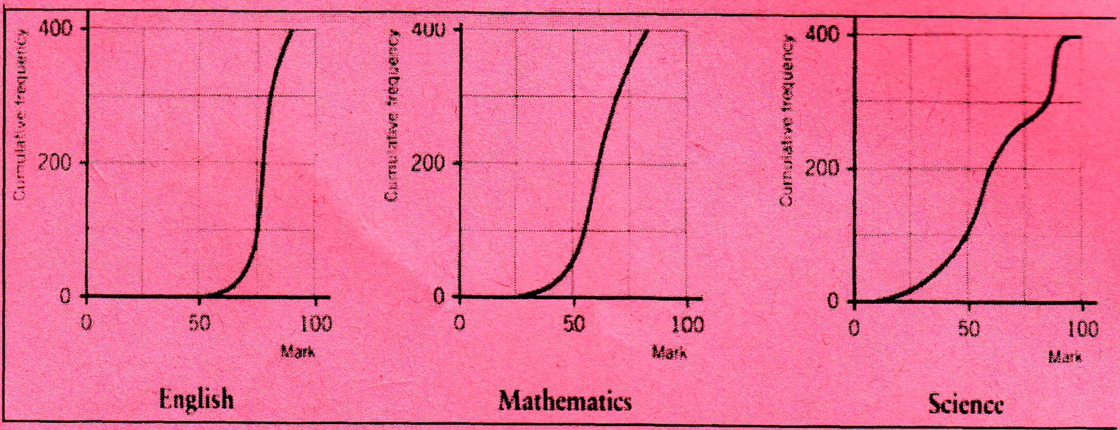
$$f(x)=\begin{cases} k(x+2)^2 & -2\leq x \prec 0 \\ 4k & 0\leq x\prec \dfrac{4}{3} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Trouvez la valeur du réel k et puis $p(-1\leq X\prec 1)$ **(2,5pts)**

13. (a) Calculez l'angle θ entre les plans d'équations $2x+3y-z=-3$ et $4x+5y+z=1$.
(b) Ecrivez ensuite le système d'équations (cartésiennes) de la droite L qui est l'intersection de ces plans. **(4pts)**

14. Vérifiez si la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $u_n=\dfrac{n+3}{4}$ est géométrique ou arithmétique. Calculez $\sum_{n=1}^{20} u_n$. **(3pts)**

15. Quatre cents (400) étudiants ont passé les examens de « English, Mathematics » et « Science ». Chaque examen est corrigé sur 100 et les résultats sont représentés par les fréquences cumulatives (cumulative frequency) suivantes : **(6pts)**



a) Dans quel examen la note médiane était la plus élevée?

b) Dans quel examen l'écart interquartile est le plus élevé ?

c) Dans quel examen approximativement 75% des étudiants ont obtenu au moins 50/100 ?

N.B : Recopiez ces diagrammes dans votre cahier de réponses pour montrer vos calculs.

SECTION B : (45 points)

16. a) Intégrez l'équation différentielle $y'' + 9y = 8x$ avec $y(0) + y'(0) = 0$

et $y'(0) = 0$. **(8pts)**

b) Les axes du plan $x0y$ subit une rotation d'angle $\alpha = 45^0$ autour de l'origine.

i) Trouvez l'équation de la courbe $2xy = 1$ dans le plan-image $x'0y'$.
ii) Esquissez le graphique.
iii) Indiquez dans les deux repères le centre, les foyers, et les asymptotes (s'il y en a). **(7pts)**

17. a) Le temps mis par un distributeur de lait à un certain centre suit approximativement une loi normale de moyenne 12 minutes et d'écart - type 2 minutes. Il délivre le lait chaque jour. Estimez le nombre de jours de l'année (365 jours) que la livraison lui prend le temps

i) plus long que dix-sept minutes;

ii) moins que dix minutes;

iii) entre neuf et treize minutes. **(10,5pts)**

b) Esquissez le graphique de la courbe définie par l'équation polaire $r = 2\cos\theta$ (Indiquez les symétries autour de l'axe ou de l'origine). **(4,5pts)**

18. a) Déterminez le réel a pour que les droites d'équations $x - y + 1 = 0$; $2x - y + 2 = 0$ *et* $ax - y + 3 = 0$ soient concourantes. Quel est le point d'intersection? **(3pts)**

b) Utilisez le produit vectoriel pour estimer l'aire du triangle dont les sommets sont les points $A(3,0,-1), B(4,2,5)$ *et* $C(7,-2,4)$. **(4,5pts)**

c) Montrez que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$.

Résolvez l'équation: $\sin 3x - \cos 2x = 0$ *pour* $x \in \Re$. **(7,5pts)**

19. a) Soit $G = \{(x, y, z) \in \Re^3 : x + y + z = 0\}$. Prouvez que G est un sous-espace vectoriel de $(\Re, \Re^3, +)$. Donnez une base de G. **(6pts)**

b) Soit $\varphi : \Re^2 \to \Re^2 : (x, y) \mapsto \varphi(x, y) = (2x + 3y, x + 2y)$. Prouvez que φ est une transformation linéaire du plan vectoriel $(\Re, \Re^2, +)$. Montrez que φ est une bijection (injection et surjection) et définissez sa réciproque (φ^{-1}) ? **(9pts)**

20. Prouvez que l'ensemble des nombres complexes de module 1 est un groupe commutatif sous la multiplication (des nombres complexes). **(15pts)**

(Voir l'appendice)

<u>Appendice: la densité de probabilité de la loi normale.</u>

Si Z est une loi normale de moyenne 0 et de variance 1, pour chaque valeur de z, la table ci-dessous donne quelques valeurs de $\phi(z) = p(Z \leq z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9958	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964

S1 + CHCB
S2 + CHPL
S3 + S5
S4
S5 + S6

S1 — 1
S2 — 2
S3+S5 — 3
S5 — 4
S6 — 5